

# اثبات به روش برهان خلف

پیش‌کش  
تمام بازی،  
برای بُرد!

اشاره

روش اثبات به کمک برهان خلف یکی از روش‌های رایج و قوی در اثبات مسائل ریاضی به‌شمار می‌آید و دامنه وسیعی از مسائل را در حوزه‌های گوناگون جبر، مثلثات، هندسه و نظریه عددها در بر می‌گیرد. در این روش اثبات، فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و با انجام یک سلسله مراحل و عملیات ریاضی، استدلال را تا جایی ادامه می‌دهیم که برخلاف فرض یا تناقضی برسیم. در نمونه‌های زیر سعی شده است، مسائل متنوع و متفاوتی با این شیوه بررسی و اثبات شوند.

## الف) نمونه‌های مثلثاتی

نمونه ۱. ثابت کنید  $\cos 1^\circ$  یک عدد گنگ است.

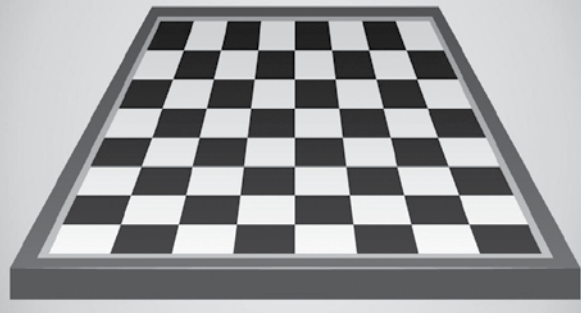
**اثبات.** فرض کنید  $\cos 1^\circ$  گویا باشد، پس  $\cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1$  نیز گویاست. با استفاده از:

$$\cos(n^\circ + 1^\circ) + \cos(n^\circ - 1^\circ) = 2\cos n^\circ \cos 1^\circ$$

و با استقرا نتیجه می‌گیریم که برای تمام عددهای صحیح  $n \geq 1$ ،  $\cos n^\circ$  گویاست که نادرست بودن این موضوع روشن است. زیرا برای نمونه،  $\cos 3^\circ$  گویا نیست. تناقض ایجاد شده به معنای اشتباه بودن فرض (فرض خلف) است و بنابراین  $\cos 1^\circ$  گویا نیست.

\* برهان خلف که اقلیدس شیفته آن بود، یکی از ظریف‌ترین سلاح‌های ریاضی‌دانان است. این کار بسیار زیباتر از طعمه‌فکنی در بازی شطرنج است. یک بازیکن شطرنج ممکن است مهره پیاده یا حتی غیرپیاده‌ای را برای قربانی شدن پیش‌کش کند، اما ریاضی‌دان کل بازی را تقدیم می‌کند.

(گاد فری‌هاردی)



و این موضوع که تفاضل دو عدد بخش پذیر بر  $P$  نیز بر  $P$  بخش پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \\ \binom{n+1}{k-1} &= \binom{n+2}{k} - \binom{n+1}{k} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \binom{n+k-1}{k-1} &= \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

لذا عددهای  $\binom{n}{k-1}$  و  $\binom{n+1}{k-1}$  و ... و  $\binom{n+k-1}{k-1}$  نیز همگی

بر  $P$  بخش پذیر هستند. اگر همین روند را ادامه دهیم، نتیجه می شود:

$$\binom{n+k-k}{k-k}$$

یعنی  $\binom{n}{0} = 1$  بر  $P$  بخش پذیر است که این موضوع خلاف فرض، و تناقض آشکار است. این تناقض حکم را کامل می کند.

**نمونه ۵.** دوازده نفر در طول یک روز بدون هیچ برنامه خاصی با یکدیگر شطرنج بازی کرده اند. می دانیم در مجموع ۱۹ بازی انجام شده است. ثابت کنید یکی از این افراد حداقل ۴ بار بازی کرده است.

**اثبات.** فرض کنیم حکم درست نباشد. پس هر یک از افراد حداکثر ۳ بار بازی کرده اند. در این صورت، حداکثر  $\frac{12 \times 3}{2}$  بازی، یعنی ۱۸ بازی انجام شده است. پس به تناقض رسیده ایم و حکم درست است.

### ج) نمونه هایی از مسابقه های ریاضی

**نمونه ۶.** زوج  $(x, y)$  از اعداد صحیح مثبت را «شاد» نامیده ایم، هرگاه  $x + y$  و  $xy$  هر دو مربع کامل باشند. مثلاً  $(20, 5)$  شاد است، چون:  $20 + 5 = 25$  و  $20 \times 5 = 100$  و هر دو مربع کامل اند. نشان دهید، هیچ زوج شادی نیست که یکی از اعضایش عدد ۳ باشد.

**اثبات.** با استفاده از برهان خلف فرض کنیم  $x$  ای باشد که زوج  $(x, 3)$  شاد باشد. پس  $3x$  مربع کامل است و بنابراین  $y$  ای هست که:  $x = 3y^2$ . در این صورت باید  $3 + 3y^2$  نیز مربع کامل باشد. اما می دانیم هر عدد

**نمونه ۲.** ثابت کنید برای هر  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، داریم:  $\sin x + \cos x \geq 1$

**اثبات.** اگر چنین نباشد، یعنی برای  $x$  ای در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  داشته باشیم:  $\sin x + \cos x < 1$ ، چون در ناحیه اول مثلثاتی  $\sin x \geq 0$  و  $\cos x \geq 0$ ، پس:  $\sin x + \cos x < 1 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x < 1 + 2 \sin x \cos x$  می رسانییم و داریم:  $1 < 1 + 2 \sin x \cos x$  در نتیجه:  $0 < 2 \sin x \cos x$  و این نیز تناقض است. و بنابراین

**نمونه ۳.** زاویه ای است حاده بر حسب رادیان. به سادگی می توان دید:  $\sin \theta < \theta$ . نشان دهید:  $\cos \theta > 1 - \theta$ .

**اثبات.** توجه می کنیم که نابرابری  $\cos \theta > 1 - \theta$  برای  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  روشن است، زیرا در این حالت  $\cos \theta$  مثبت و  $1 - \theta$  منفی است. در حالت  $0 < \theta \leq 1$  از برهان خلف استفاده می کنیم. اگر داشته باشیم:  $\cos \theta \leq 1 - \theta$ ، می توانیم بنویسیم:  $1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta > \sin^2 \theta + (1 - \theta)^2 \Rightarrow \theta < \theta^2 + (1 - \theta)^2 < 1$  اما  $\theta < \theta^2$  با شرط  $0 < \theta \leq 1$  در تناقض است. این تناقض حکم را کامل می کند.

### ب) نمونه های مربوط به شمارش

**نمونه ۴.**  $P$  را عددی طبیعی و بزرگ تر از واحد و  $n$  و  $k$  را دو عدد طبیعی فرض می کنیم ( $n \geq k$ ). ثابت کنید دست کم یکی از عددهای  $\binom{n}{k}$  و  $\binom{n+1}{k}$  و ... و  $\binom{n+k}{k}$  بر  $P$  بخش پذیر نیست.

**اثبات.** به روش برهان خلف، فرض کنیم این طور نباشد و همه عددهای فوق بر  $P$  بخش پذیر باشند. با استفاده از اتحاد ترکیبیاتی

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

مربع کامل در تقسیم بر ۴، باقی مانده‌ای برابر صفر یا یک دارد. پس باید،  $y^2 = 4k$  یا:  $y^2 = 4k + 1$ . اما اگر:  $y^2 = 4k$ ، آن گاه  $3y^2 + 3$  در تقسیم بر ۴ باقی مانده‌ای برابر ۳ خواهد داشت؛ و اگر:  $y^2 = 4k + 1$ ، آن گاه  $3y^2 + 3$  در تقسیم بر ۴ باقی مانده‌ای برابر ۲ خواهد داشت که در هر دو حالت تناقض آشکار است. این تناقض حکم را ثابت می‌کند.

**نمونه ۷.** سه عدد طبیعی و متوالی غیرمشخص را در نظر بگیرید. ثابت کنید که مکعب بزرگ‌ترین آن‌ها نمی‌تواند با مجموع مکعب‌های دو عدد دیگر برابر باشد. (مسابقه‌های ریاضی مجارستان-۱۹۰۹)

**اثبات.** فرض کنید  $n-1$ ،  $n$  و  $n+1$  سه عدد طبیعی متوالی باشند. با استفاده از روش برهان خلف فرض کنیم:  $(n+1)^3 = n^3 + (n-1)^3$  یعنی:  $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1$  در این صورت:  $2 = n^3 - 6n^2 \Rightarrow 2 = n^2(n-6)$  اگر  $n \leq 6$ ، که داریم:  $n^2(n-6) \leq 0$  و تناقض روشن است. اگر  $n > 6$ ، در این صورت داریم:  $n^2(n-6) > 36$  که نمی‌تواند با ۲ برابر باشد و تناقض است. این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

**نمونه ۸.** عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  بین ۰ و ۱ داده شده‌اند. ثابت کنید ممکن نیست عبارت‌های  $a(1-b)$ ،  $b(1-c)$  و  $c(1-a)$ ، همگی بزرگ‌تر از  $\frac{1}{4}$  باشند. (بیست‌ویکمین المپیاد ریاضی انگلستان-۱۹۸۵)

**اثبات.** با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم برقرار نباشد؛ یعنی تمامی عبارت‌های  $a(1-b)$ ،  $b(1-c)$  و  $c(1-a)$  بزرگ‌تر از  $\frac{1}{4}$  باشند.

$$\left. \begin{aligned} a(1-b) &> \frac{1}{4} \\ b(1-c) &> \frac{1}{4} \\ c(1-a) &> \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64} \quad (I)$$

از آنجا که:  $0 < a < 1$ ، پس  $a$  و  $1-a$  مثبت‌اند. با انتخاب  $x=a$  و  $y=1-a$  و جای گذاری در نامساوی مشهور واسطه حسابی و هندسی، یعنی  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ ، نتیجه می‌شود:  $\sqrt{a(1-a)} \leq \frac{1}{2}$ . یعنی:  $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$ .

به طریق مشابه داریم:  $b(1-b) \leq \frac{1}{4}$  و  $c(1-c) \leq \frac{1}{4}$ . از ضرب ۳ نابرابری اخیر نتیجه می‌شود:

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad (II)$$

نابرابری (II) با (I) در تناقض است و این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

**نمونه ۹.** نشان دهید  $a$  و  $b$  طبیعی را نمی‌توان یافت که هم  $a^2 + 2b$  و هم  $b^2 + 2a$  مربع کامل باشند.

**اثبات.** با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم  $a$  و  $b$  طبیعی موجود باشند، به‌طوری که هر دو عدد  $a^2 + 2b$  و  $b^2 + 2a$  مربع کامل باشند.

از آنجا که  $a^2 + 2b$  مربع کامل است و:  $a^2 + 2b > a^2$  و نخستین عدد بزرگ‌تر از  $a^2$  که مربع کامل هم باشد  $(a+1)^2$  است، پس لزوماً:  $a^2 + 2b \geq (a+1)^2$ .

پس:  $a^2 + 2b + 1 \geq a^2 + 2b + 2a + 1 \geq 2b + 2a + 1$ . در نتیجه:  $2b \geq 2a + 1$ .

اما:  $2a + 1 > 2a$ . لذا:  $2b > 2a$  و در نتیجه: (I)  $b > a$ .

به طریق مشابه و با فرض اینکه  $b^2 + 2a$  مربع کامل باشد، داریم:  $b^2 + 2a > b^2 \Rightarrow b^2 + 2a \geq (b+1)^2$

$$\Rightarrow b^2 + 2a \geq b^2 + 2b + 1 \Rightarrow 2a \geq 2b + 1$$

و:  $2b + 1 > 2b$  پس:  $2a > 2b$  و: (II)  $a > b$ .

نتایج I و II تناقض آشکارند. پس با توجه به برهان خلف حکم ثابت است.

### تمرین

۱. نشان دهید هر دو جمله متوالی دنباله فیبوناتچی نسبت به هم اول‌اند.

۲. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

۳. ثابت کنید  $\sqrt{2}$  عددی است گنگ.

۴.  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی غیرصفر هستند. ثابت کنید حداقل یکی از معادله‌های زیر ریشه‌های حقیقی دارند:

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad bx^2 + 2cx + a = 0,$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0.$$

۵. ثابت کنید نمی‌توان خانه‌های جدولی  $10 \times 10$  را با عددهایی صحیح طوری پر کرد که مجموع عددهای هر سطر جدول عددی منفی و مجموع عددهای هر ستون جدول عددی مثبت باشد.